Solution de la Série $\mathrm{N}^o 3$: Endomorphismes, matrices et inverse d'une matrice

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ défini par

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f(\mathrm{i}) = \mathrm{j},$$

où $\mathrm{j} = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

1. Démontrer que f est un automorphisme de $\mathbb{C}$.
2. Déterminer le complexe z tel que $f(z) = \mathrm{i}$.
3. Soit f^{-1} l'application réciproque de f. Ecrire la matrice de f^{-1} relativement à la base $\{1, \mathrm{i}\}$.

Solution : Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ défini par

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f(\mathrm{i}) = \mathrm{j},$$

où $\mathrm{j} = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

1. Démontrons que f est un automorphisme de $\mathbb{C}$: soit $v \in \mathbb{C}$ tel que $v = x.1 + y\mathrm{i}$, alors

$$f(v) = xf(1) + yf(\mathrm{i}) = x.1 + ye^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \left(x + y\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + \mathrm{i}y\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

donc $f(v) = \left(x - \frac{1}{2}y\right).1 - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}y$.
f est injectif, en effet,

$$\mathrm{Ker}(f) = \{v \in E \,/\, f(v) = 0_E\} = \left\{v = x.1 + \mathrm{i}y \in E \,/\, \left(x - \frac{1}{2}y\right).1 - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}y = 0\right\}$$

comme le système $\{1, \mathrm{i}\}$ est libre, alors

$$\mathrm{Ker}(f) \ : \ \begin{cases} x - \frac{1}{2}y &= 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y &= 0, \end{cases}$$

d'où $\mathrm{Ker}(f)$ est le sous-espace vectoriel de E d'équation

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0, \end{cases}$$

finalement $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ est le sous-espace vectoriel nul de $\mathbb{C}$, ce qui prouve que f est injectif et comme $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ alors f est bijectif de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, soit f un automorphisme de $\mathbb{C}$.

2. Le $\{1, \mathrm{i}\}$ est une base de $\mathbb{C}$, comme f est un automorphisme de $\mathbb{C}$ alors f implique une base de $\mathbb{C}$ en une autre base de $\mathbb{C}$, d'où $\{1, \mathrm{j}\}$ est une autre base de $\mathbb{C}$.

3. Déterminons le complexe z tel que $f(z) = \mathrm{i}$: soit $z = x.1 + y\mathrm{i}$ un complexe, alors

$$f(z) = f(x.1 + y.\mathrm{i}) = xf(1) + yf(\mathrm{i}) = \left(x - \frac{1}{2}y\right).1 - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}y = \mathrm{i} = 0.1 + 1.\mathrm{i}$$

comme le système $\{1, \mathrm{i}\}$ est libre, alors

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y &= 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y &= 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x &= \frac{1}{2}y = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ y &= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

d'où $z = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 + 2\mathrm{i})$ est le complexe qui vérifie $f(z) = \mathrm{i}$.

4. Soit f^{-1} l'application réciproque de f. La matrice de f^{-1} relativement à la base $(1, \mathrm{i})$ est : l'application f est linéaire et bijective alors f^{-1} est linéaire et bijective, et on a

$$f(1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(1) = 1.1 + 0.\mathrm{i}$$

et

$$f(\mathrm{i}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{i} = -\frac{1}{2}f^{-1}(1) + \frac{\sqrt{3}}{2}f^{-1}(\mathrm{i})$$

car f^{-1} est linéaire de $\mathbb{C}$ dans lui-même, donc

$$f^{-1}(\mathrm{i}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{i} + \frac{1}{2}f^{-1}(1)\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\mathrm{i} + \frac{1}{2}.1\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$$

d'où la matrice de f^{-1} relativement à la base $(1, \mathrm{i})$, notée $\mathrm{M}_{(1,\mathrm{i})}(f^{-1})$, est donnée par

$$\mathrm{M}_{(1,\mathrm{i})}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Exercice 2

Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$F = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + 2z = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de F.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ où G est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $u = (2, 1, 1)$.

Solution : Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$F = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - 2z = 0\}$$

1. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$: en effet,
   (a) $F \neq \emptyset$ car $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$ puisque $0 + 0 - 2 \times 0 = (1 + 1 - 2)0 = 0 \times 0 = 0$.
   (b) F est stable par l'addition (loi interne de $\mathbb{R}^3$) : en effet, soient $X = (x, y, z)$ et $Y = (x', y', z')$ deux éléments dans F, alors

   $$x + y - 2z = 0 \quad \text{et} \quad x' + y' - 2z' = 0$$

   par l'addition des deux équations, il vient

   $$x+y-2z+x'+y'-2z' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+x')+(y+y')-2(z+z') = 0 \quad \text{car } (\mathbb{R}, +) \text{ est abélien}$$

   donc $X + Y = (x + x', y + y', z + z')$ satisfait l'équation de F ; d'où $X + Y \in F$.
   (c) F est stable par la multiplication (loi externe de $\mathbb{R}^3$) : en effet, soient $X = (x, y, z)$ un élément dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

   $$x + y - 2z = 0$$

   par la multiplication de l'équation fois λ, il vient

   $$\lambda(x + y - 2z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda x) + (\lambda y) - 2(\lambda z) = 0$$

   donc $\lambda X = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ satisfait l'équation de F ; d'où $\lambda X \in F$.

   D'après (a), (b) et (c) on obtient F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminons une base de F : en effet, soit $X = (x, y, z)$ alors les composantes (x, y, z) de X sont caractérisées par l'équation

$$x + y - 2z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + 2z$$

donc $X = (x, y, z) = (x, -x + 2z, z) = (x, -x, 0) + (0, 2z, z) = x(1, -1, 0) + y(0, 2, 1) = xv_1 + yv_2$ où $v_1 = (1, -1, 0)$ et $v_2 = (0, 2, 1)$; d'où le système $\{v_1; v_2\}$ engendre F.
le système $\{v_1; v_2\}$ est libre, en effet, soient α et β tels que $\alpha\, v_1 + \beta\, v_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$, alors

$$\alpha\, v_1 + \beta\, v_2 = \alpha(1, -1, 0) + \beta(0, 2, 1) = (\alpha, -\alpha + 2\beta, \beta) = (0, 0, 0)$$

donc $\alpha = \beta = 0$; d'où le système $\{v_1; v_2\}$ engendre F et il est libre ; ce qui montre que le système $\{v_1; v_2\}$ où $v_1 = (1, -1, 0)$ et $v_2 = (0, 2, 1)$ est une base de F.

3. Montrons que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ où G est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $u = (2, 1, 1)$: en effet, si le sous-espace vectoriel de G engendré par le vecteur $u = (2, 1, 1)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$, alors le système $\{v_1; v_2\} \cup \{u\}$ serait une base de $\mathbb{R}^3$;
donc il suffit de montrer que le système $\{v_1; v_2; u\}$ est une base dans $\mathbb{R}^3$;
comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, alors il suffit de montrer que le système $\{v_1; v_2; u\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. Pour cela, soient α, β et γ des réels tels que $\alpha\, v_1 + \beta\, v_2 + \gamma\, u = (0, 0, 0)$; montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On a

$$\alpha\, v_1 + \beta\, v_2 + \gamma\, u = \alpha(1, -1, 0) + \beta(0, 2, 1) + \gamma(2, 1, 1) = (\alpha + 2\gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma, \beta + \gamma) = (0, 0, 0)$$

ce qui implique

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ \beta = -\gamma \\ 2\gamma - 2\gamma + \gamma = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ \beta = -\gamma \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$; ce qui montre que le système $\{v_1; v_2; u\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$; d'où le système $\{v_1; v_2; u\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$; ce qui prouve que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ où G est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $u = (2, 1, 1)$.
Remarque : F est un plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par le système $\{v_1; v_2\}$ où $v_1 = (1, -1, 0)$ et $v_2 = (0, 2, 1)$ et G est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $u = (2, 1, 1)$.

$\square$

Exercice 3
Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et (i, j) une base de E. Soit f et g deux endomorphismes de E dont les matrices dans la base (i, j) sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f et g sont inversibles (ou bijectifs), puis trouver les matrices de f^{-1} et g^{-1} dans la base (i, j).
2. Déterminer dans la base (i, j) les matrices des endomorphismes suivants :

$$(x.f - y.g); \quad (2.f - x.id_E); \quad (-f + \pi.g); \quad (x.f + \pi y.g).$$

3. Trouver des relations entre x et y pour que les endomorphismes

$$(x.f - y.g); \quad (2.f - x.id_E); \quad (-f + \pi.g); \quad (x.f + \pi y.g)$$

soient inversibles.

Solution : Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et (i, j) une base de E. Soit f et g deux endomorphismes de E dont les matrices dans la base (i, j) sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}$.

1. – Montrons que f et g sont inversibles : on a $A = M_{(i,j)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, alors f est bijectif si et seulement si A est inversible, soit $\det(A) \neq 0$. On a

   $$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times 4 = 5 - 8 = -3 \neq 0$$

   donc A est inversible, d'où f est bijectif.
   Ded même, on a $B = M_{(i,j)}(g) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, alors g est inversible si et seulement si B est inversible, soit $\det(B) \neq 0$. On a

   $$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 8 \times 5 - 6 \times 7 = 40 - 42 = -2 \neq 0$$

   donc B est inversible, d'où g est bijectif.

   – Les matrices de f^{-1} et g^{-1} dans la base (i, j) : on a

   $$A = M_{(i,j)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} f(i) & = & 1.i + 4.j \\ f(j) & = & 2.i + 5.j, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} i & = & f^{-1}(1.i + 4.j) \\ j & = & f^{-1}(2.i + 5.j), \end{array} \right.$$

   donc

   $$\left\{ \begin{array}{lcl} i & = & f^{-1}(i) + 4f^{-1}(j) \\ j & = & 2f^{-1}(i) + 5f^{-1}(j), \end{array} \right.$$

   d'où

   $$\left\{ \begin{array}{lcl} f^{-1}(i) & = & -\frac{5}{3}i + \frac{4}{3}j \\ f^{-1}(j) & = & \frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j, \end{array} \right.$$

   finalement,

   $$A^{-1} = M_{(i,j)}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

   De même, on a

   $$B = M_{(i,j)}(g) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} g(i) & = & 5.i + 7.j \\ g(j) & = & 6.i + 8.j, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} i & = & g^{-1}(5.i + 7.j) \\ j & = & g^{-1}(6.i + 8.j), \end{array} \right.$$

   donc

   $$\left\{ \begin{array}{lcl} i & = & 5g^{-1}(i) + 7g^{-1}(j) \\ j & = & 6g^{-1}(i) + 8g^{-1}(j), \end{array} \right.$$

   d'où

   $$\left\{ \begin{array}{lcl} g^{-1}(i) & = & -4i + \frac{7}{2}j \\ g^{-1}(j) & = & 3i - \frac{5}{2}j, \end{array} \right.$$

   finalement,

   $$B^{-1} = M_{(i,j)}(g^{-1}) = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Déterminons les matrices des endomorphismes suivants :

$$(x.f - y.g); \quad (2.f - x.id_E); \quad (-f + \pi.g); \quad (x.f + \pi y.g)$$

relativement la base (i, j) :

$$M_{(i,j)}(x.f - y.g) = xM_{(i,j)}(f) - yM_{(i,j)}(g) = x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-5y & 2x-6y \\ 4x-7y & 5x-8y \end{pmatrix}$$

$$M_{(i,j)}(2.f - x.id_E) = 2M_{(i,j)}(f) - xM_{(i,j)}(id_E) = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x & 4 \\ 8 & 10-x \end{pmatrix}$$

$$M_{(i,j)}(-f + \pi.g) = -M_{(i,j)}(f) + \pi M_{(i,j)}(g) = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \pi\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+5\pi & -2+6\pi \\ -4+7\pi & -5+8\pi \end{pmatrix}$$

$$M_{(i,j)}(x.f + \pi y.g) = xM_{(i,j)}(f) + \pi yM_{(i,j)}(g) = x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \pi y\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+5\pi y & 2x+6\pi y \\ 4x+7\pi y & 5x+8\pi y \end{pmatrix}$$

3. Les relations entre x et y pour que les endomorphismes

$$(x.f - y.g); \quad (2.f - x.id_E); \quad (-f + \pi.g); \quad (x.f + \pi y.g)$$

soient inversibles :

– l'endomorphisme $(x.f - y.g)$ est bijectif si la matrice $M_{(i,j)}(x.f - y.g)$ est inversible, soit

$$\det(M_{(i,j)}(x.f - y.g)) \neq 0$$

or

$$\begin{aligned} \det(M_{(i,j)}(x.f - y.g)) &= \det\begin{pmatrix} x-5y & 2x-6y \\ 4x-7y & 5x-8y \end{pmatrix} \\ &= (x-5y)(5x-8y) - (2x-6y)(4x-7y) \\ &= -3x^2 + 5xy - 2y^2 \end{aligned}$$

d'où $(x.f - y.g)$ est bijectif si $-3x^2 + 5xy - 2y^2 \neq 0$.

– l'endomorphisme $(2.f - x.id_E)$ est bijectif si la matrice $M_{(i,j)}(2.f - x.id_E)$ est inversible, soit

$$\det(M_{(i,j)}(2.f - x.id_E)) \neq 0$$

or

$$\begin{aligned} \det(M_{(i,j)}(2.f - x.id_E)) &= \det\begin{pmatrix} 2-x & 4 \\ 8 & 10-x \end{pmatrix} \\ &= (2-x)(10-x) - 4 \times 8 \\ &= x^2 - 12x - 12 \end{aligned}$$

d'où $(2.f - x.id_E)$ est bijectif si $x^2 - 12x - 12 \neq 0$.

– l'endomorphisme $(-f + \pi.g)$ est bijectif si la matrice $M_{(i,j)}(-f + \pi.g)$ est inversible, soit

$$\det(M_{(i,j)}(-f + \pi.g)) \neq 0$$

or

$$\begin{aligned} \det(M_{(i,j)}(-f + \pi.g)) &= \det\begin{pmatrix} -1+5\pi & -2+6\pi \\ -4+7\pi & -5+8\pi \end{pmatrix} \\ &= (-1+5\pi)(-5+8\pi) - (-2+6\pi)(-4+7\pi) \\ &= -2\pi^2 + 5\pi - 3 \end{aligned}$$

d'où $(-f + \pi.g)$ est bijectif car $-2\pi^2 + 5\pi - 3 \neq 0$.

– l'endomorphisme $(x.f+\pi y.g)$ est bijectif si la matrice $M_{(i,j)}(x.f+\pi y.g)$ est inversible, soit

$$\det(M_{(i,j)}(x.f+\pi y.g)) \neq 0$$

or

$$\begin{aligned}
\det(M_{(i,j)}(x.f+\pi y.g)) &= \begin{pmatrix} x+5\pi y & 2x+6\pi y \\ 4x+7\pi y & 5x+8\pi y \end{pmatrix} \\
&= (x+5\pi y)(5x+8\pi y)-(2x+6\pi y)(4x+7\pi y) \\
&= -3x^2-5\pi xy-2\pi^2y^2
\end{aligned}$$

d'où $(x.f+\pi y.g)$ est bijectif si $-3x^2-5\pi xy-2\pi^2y^2 \neq 0$.

$\square$

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que f^2 soit l'endomorphisme nul.

1. Calculer $(id_E - f)\circ(id_E+f)$.
2. En déduire que (id_E-f) et (id_E+f) sont bijectifs. Quels sont les endomorphismes $(id_E-f)^{-1}$ et $(id_E+f)^{-1}$.
3. Vérifier les résultats précédents lorsque l'espace vectoriel E est de dimension 2 et lorsque f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base (i,j) fixée de E est :
   (a) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) $A=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution : Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que f^2 soit l'endomorphisme nul.

1. Calculons $(id_E-f)\circ(id_E+f)$: soit $x\in E$, on a

$$\begin{aligned}
(id_E-f)\circ(id_E+f)(x) &= id_E\circ id_E(x)+id_E\circ f(x)-f\circ id_E(x)-f\circ f(x) \\
&= x-f(x)+f(x)-f^2(x) \\
&= x+(1-1)f(x)+0_E \\
&= id_E(x)
\end{aligned}$$

   donc $(id_E-f)\circ(id_E+f)(x)=id_E(x)$ pour tout $x\in E$,
   d'où $(id_E-f)\circ(id_E+f)=id_E$ est l'endomorphisme identique de E.

2. – D'après la question 1., on a $(id_E-f)\circ(id_E+f)=id_E$ et de même on a $(id_E+f)\circ(id_E-f)=id_E$, ce qui montre (id_E-f) et (id_E+f) sont bijectifs.
   – les endomorphismes $(id_E-f)^{-1}$ et $(id_E+f)^{-1}$ sont $(id_E-f)^{-1}=(id_E+f)$ et $(id_E+f)^{-1}=(id_E-f)$, car $(id_E-f)\circ(id_E+f)(x)=id_E(x)=x$ et $(id_E+f)\circ(id_E-f)(x)=id_E(x)=x$ pour tout $x\in E$, soit $(id_E+f)(x)=(id_E-f)^{-1}(x)$ et $(id_E-f)(x)=(id_E+f)^{-1}(x)$ pour tout $x\in E$.

3. Soit E l'espace vectoriel de dimension 2 et f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base (i,j) fixée de E est :
   (a) $A=M_{(i,j)}(f)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(i) &=& 0i+1j=j \\ f(j) &=& 0i+0j=0_E, \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} (id_E-f)(i) &=& i-j \\ (id_E-f)(j) &=& j, \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcl}(id_E+f)(i) & = & i+j\\ (id_E+f)(j) & = & j,\end{array}\right.$$

On a

$$(id_E-f)\circ(id_E+f)(i)=(id_E-f)(i+j)=i+j-f(i)-f(j)=i+j-j-0_E=i$$

$$(id_E-f)\circ(id_E+f)(j)=(id_E-f)(j)=id_E(j)-f(j)=j-0_E=j,$$

donc pour tout $v=xi+yj\in E$ on a

$$(id_E-f)\circ(id_E+f)(v)=x(id_E-f)\circ(id_E+f)(i)+y(id_E-f)\circ(id_E+f)(j)=xi+yj=v=id_E(v)$$

d'où $(id_E-f)\circ(id_E+f)=id_E$. De plus, on a

$$M_{(i,j)}((id_E-f)^{-1})=M_{(i,j)}((id_E+f))=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

et

$$M_{(i,j)}((id_E+f)^{-1})=M_{(i,j)}((id_E-f))=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

(b) $A=M_{(i,j)}(f)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, alors

$$\left\{\begin{array}{rcl}f(i) & = & 0i+0j=0_E\\ f(j) & = & 1i+0j=i,\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl}(id_E-f)(i) & = & i\\ (id_E-f)(j) & = & -i+j,\end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcl}(id_E+f)(i) & = & i\\ (id_E+f)(j) & = & i+j,\end{array}\right.$$

On a

$$(id_E-f)\circ(id_E+f)(i)=(id_E-f)(i)=i-f(i)=i-0_E=i$$

$$(id_E-f)\circ(id_E+f)(j)=(id_E-f)(i+j)=i+j-f(i)-f(j)=i+j-i=j,$$

donc pour tout $v=xi+yj\in E$ on a

$$(id_E-f)\circ(id_E+f)(v)=x(id_E-f)\circ(id_E+f)(i)+y(id_E-f)\circ(id_E+f)(j)=xi+yj=v=id_E(v)$$

d'où $(id_E-f)\circ(id_E+f)=id_E$. De plus, on a

$$M_{(i,j)}((id_E-f)^{-1})=M_{(i,j)}((id_E+f))=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

et

$$M_{(i,j)}((id_E+f)^{-1})=M_{(i,j)}((id_E-f))=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

(c) $A=M_{(i,j)}(f)=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\2&-1\end{pmatrix}$, alors

$$\left\{\begin{array}{rcl}f(i) & = & 1i+2j\\ f(j) & = & -\frac{1}{2}i-1j,\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl}(id_E-f)(i) & = & -2i\\ (id_E-f)(j) & = & \frac{1}{2}i+2j,\end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcl}(id_E+f)(i) & = & 2i+2j\\ (id_E+f)(j) & = & -\frac{1}{2}i,\end{array}\right.$$

On a

$$\begin{aligned}(id_E - f)\circ(id_E + f)(i) &= (id_E - f)(2i+2j) = 2(i+j) - 2f(i) - 2f(j)\\ &= 2(i + j - i - 2j + \frac{1}{2}i + j)\\ &= i\\ (id_E - f)\circ(id_E + f)(j) &= (id_E - f)(-\frac{1}{2}i) = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}f(i)\\ &= -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}(1i + 2j)\\ &= j,\end{aligned}$$

donc pour tout $v = xi + yj \in E$ on a

$$(id_E - f)\circ(id_E + f)(v) = x(id_E - f)\circ(id_E + f)(i) + y(id_E - f)\circ(id_E + f)(j) = xi + yj = v = id_E(v)$$

d'où $(id_E - f)\circ(id_E + f) = id_E$. De plus, on a

$$M_{(i,j)}((id_E - f)^{-1}) = M_{(i,j)}((id_E + f)) = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$M_{(i,j)}((id_E + f)^{-1}) = M_{(i,j)}((id_E - f)) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercice 5

On note par O la matrice nulle et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordres 2. Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} \alpha + \delta & = -1 \\ \alpha\delta - \beta\gamma & = -2, \end{cases}$$

On désigne $E = \overline{< I, A >}$ l'espace engendré par les matrices I et A.

1. Quelle est la dimension de E ?.
2. Vérifier que :
$$A^2 = -A + 2.I.$$
En déduire que A est inversible et que $A^{-1} \in E$.
3. Montrer que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. On prend $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ et $\delta = 0$.
   (a) Vérifier que la relation : $A^2 = -A + 2.I$, est satisfaite.
   (b) Préciser le noyau et l'image des endomorphismes φ et ψ de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base naturelle sont respectivement :
$$A \quad \text{et} \quad A + 2.I.$$

Solution : Soit O la matrice nulle et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordres 2. Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} \alpha + \delta & = -1 \\ \alpha\delta - \beta\gamma & = -2, \end{cases}$$

Désignons par $E = \overline{< I, A >}$ l'espace engendré par les matrices I et A.

1. La dimension de E est 2 :
en effet, E est engendré par le système $\{I, A\}$ qui est de cardinal 2, soit $\dim(E) = \text{card}\{I, A\} = 2$.

2. – Vérifions que $A^2 = -A + 2.I$: en effet,

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \beta(\alpha+\delta) \\ \gamma(\alpha+\delta) & \delta^2 + \beta\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha\delta + 2 & -\beta \\ -\gamma & \delta^2 + \alpha\delta + 2 \end{pmatrix}$$

car $\alpha + \delta = -1$ et $\alpha\delta + 2 = \beta\gamma$ donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha\delta & -\beta \\ -\gamma & \delta^2 + \alpha\delta \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha+\delta) & -\beta \\ -\gamma & \delta(\delta+\alpha) \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où
$$A^2 = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est à dire que $A^2 = -A + 2I$

– La matrice A est inversible et que $A^{-1} \in E$: on vient de montrer que $A^2 = -A + 2I$, alors $A^2 + A = 2I$, donc $A(A + I) = (A + I)A = 2I$, d'où A est inversible, de plus on a

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha+1 & \beta \\ \gamma & \delta+1 \end{pmatrix}$$

d'où $A^{-1} = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}A$, ce qui prouve que $A^{-1} \in E$.

3. Montrons que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

   i) $E \neq \emptyset$ car la matrice nulle

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 0 \times I + 0 \times A$$

   est une combinaison linéaire unique dans le système générateur $\{I, A\}$ de E.

   ii) Soit U et V deux éléments de E, alors $U = aI + bA$ et $V = a'I + b'A$ sont des combinaisons linéaires unique, donc $U - V = (a - a')I + (b - b')A$ est une combinaison linéaire unique de $U - V$ dans E, d'où $U - V \in E$.

   iii) Soit U et V deux éléments de E, alors $U = aI + bA$ et $V = a'I + b'A$ sont des combinaisons linéaires unique, donc

$$UV = (aI + bA)(a'I + b'A) = aa'I + (ab' + ba')A + bb'A^2$$

   or $A^2 = -A + 2I$, alors

$$UV = aa'I + (ab' + ba')A + bb'(-A + 2I) = (aa' + 2)I + (ab' + ba' - 1)A.$$

   On pose $c = aa' + 2$ et $d = ab' + ba' - 1$, alors $UV = cI + dA$ est une combinaison linéaire unique de UV dans le système générateur $\{I, A\}$ de E, d'où $UV \in E$

   d'après i), ii) et iii) est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. On prend $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ et $\delta = 0$.

   (a) Vérifions que la relation $A^2 = -A + 2.I$ est satisfaite : on a $\alpha + \delta = -1 + 0 = -1$ et $\alpha\delta - \beta\gamma = -1 \times 0 - 2 \times 1 = 0 - 2 = -2$, donc les paramètres $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ et $\delta = 0$ vérifient bien les relations $\begin{cases} \alpha + \delta & = -1 \\ \alpha\delta - \beta\gamma & = -2, \end{cases}$. D'où

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha+1 & \beta \\ \gamma & \delta+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Précisons les noyaux et les images des endomorphismes φ et ψ de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base naturelle sont respectivement : A et $A+2.I$, on a

$$A = \mathrm{M}_{(e_1,e_2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A+2I = \mathrm{M}_{(e_1,e_2)}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{cases} \varphi(e_1) &= -e_1+e_2 \\ \varphi(e_2) &= 2e_1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \psi(e_1) &= e_1+e_2 \\ \psi(e_2) &= 2(e_1+e_2), \end{cases}$$

Soit $v \in \mathbb{R}^2$, alors $v = xe_1 + ye_2$, donc

$$\varphi(v) = x\varphi(e_1) + y\varphi(e_2) = x(-e_1+e_2) + 2ye_1 = (-x+2y)e_1 + xe_2,$$

et

$$\psi(v) = x\psi(e_1) + y\psi(e_2) = x(e_1+e_2) + 2y(e_1+e_2) = (x+2y)e_1 + (x+2y)e_2.$$

– Le noyau $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est défini par

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{v \in \mathbb{R}^2 \,/\, \varphi(v) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$

soit $\mathrm{Ker}(\varphi)$: $(-x+2y)e_1 + xe_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$, et comme le système $\{e_1, e_2\}$ est libre, alors

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \ : \begin{cases} -x+2y &= 0 \\ x &= 0, \end{cases}$$

d'où $\mathrm{Ker}(\varphi) \ : \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$, c'est à dire que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
Le noyau $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ est le sous-espace vectoriel nul, alors φ est injectif, et comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, alors φ est bijectif, ce qui montre que $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

– Le noyau $\mathrm{Ker}(\psi)$ est défini par

$$\mathrm{Ker}(\psi) = \{v \in \mathbb{R}^2 \,/\, \psi(v) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$

soit $\mathrm{Ker}(\psi)$: $(x+2y)e_1 + (x+2y)e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$, et comme le système $\{e_1, e_2\}$ est libre, alors

$$\mathrm{Ker}(\psi) \ : \begin{cases} x+2y &= 0 \\ x+2y &= 0, \end{cases}$$

d'où $\mathrm{Ker}(\psi) \ : \ x+2y = 0$, c'est à dire que $\mathrm{Ker}(\psi)$ est la droite vectorielle d'équation $x+2y=0$.
Le noyau $\mathrm{Ker}(\psi)$ est le sous-espace vectoriel de dimension 1, alors ψ n'est pas injectif, donc ψ n'est pas surjectif, d'où ψ n'est pas bijectif.
L'image $\mathrm{Im}(\psi)$ de ψ est

$$\mathrm{Im}(\psi) = \{(x+2y)e_1 + (x+2y)e_2 \,/\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x+2y)(e_1+e_2) \,/\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

d'où

$$\mathrm{Im}(\psi) = \psi(\mathbb{R}^2) = \{\alpha u \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

où $u = e_1 + e_2$, ce qui prouve que $\mathrm{Im}(\psi)$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $u = e_1 + e_2$.

□

Exercice 6

On considère dans $\mathbb{C}$ le système suivant :

$$\begin{cases} (1+\mathrm{i})x + (1+2.\mathrm{i})y &= 1+5.\mathrm{i} \\ (3-\mathrm{i})x + (4-2.\mathrm{i})y &= 2-\mathrm{i}. \end{cases} \tag{6.1}$$

d'inconnus complexes x et y. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'on peut écrire le système (6.1) sous la forme suivante :

$$A.X = b$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à déterminer et $b = \begin{pmatrix} 1+5.\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}$

2. Montrer que la matrice A est inversible, puis trouver son inverse A^{-1}.
3. Ecrire $X = A^{-1}b$ et calculer x et y.

Solution : Soit x et y les inconnus du système (6.2). On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Montrons qu'on peut écrire le système (6.2) sous la forme $A.X = b$, en effet

$$\begin{cases} (1+\mathrm{i})x + (1+2.\mathrm{i})y &= 1+5.\mathrm{i} \\ (3-\mathrm{i})x + (4-2.\mathrm{i})y &= 2-\mathrm{i}. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1+2.\mathrm{i} \\ 3-\mathrm{i} & 4-2.\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5.\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

d'où le système $AX = b$ où $A = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1+2.\mathrm{i} \\ 3-\mathrm{i} & 4-2.\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $b = \begin{pmatrix} 1+5.\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

2. – Montrons que la matrice A est inversible : on a

$$\det(A) = (1+\mathrm{i})(4-2.\mathrm{i}) - (1+2.\mathrm{i})(3-\mathrm{i}) = 1 - 3\mathrm{i} \neq 0$$

donc A est inversible, d'où A^{-1} l'inverse de A existe et il est unique.

– Trouvons l'inverse A^{-1} de A : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(\mathrm{Com}(A))^T$ où $\mathrm{Com}(A)$ est la comatrice de A. On a

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} 4-2.\mathrm{i} & -(3-\mathrm{i}) \\ -(1+2.\mathrm{i}) & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

alors

$$A^{-1} = \frac{1}{1-3\mathrm{i}} \begin{pmatrix} 4-2.\mathrm{i} & -(1+2.\mathrm{i}) \\ -(3-\mathrm{i}) & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \\ -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} & -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

on peut vérifier aisement que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_2$.

3. Calculons x et y : on a

$$AX = b \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}b$$

$$X = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \\ -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} & -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+5.\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}\mathrm{i} \\ \frac{17}{5} - \frac{24}{5}\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

d'où $x = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}\mathrm{i}$ et $y = \frac{17}{5} - \frac{24}{5}\mathrm{i}$.

□